ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI KHỐI 8

TRƯỜNG HOÀNG HOA THÁM - QUẬN TÂN BÌNH

Ngày thi: 13/4/2014

Thời gian: 90 Phút

Câu 1: Giải phương trình

1) $\dfrac{1}{x^2+9x+20}+\dfrac{1}{x^2+11x+30}+\dfrac{1}{x^2+13x+42}=18$

2) $|2x-3|+1=x$

Câu 2: Cho biểu thức: $A=\dfrac{a^2+4a+4}{a^3+2a^2-4a-8}$

1) Tìm điều kiện và rút gọn biểu thức A
2) Tìm các số nguyên a để biểu thức A có giá trị nguyên.

Câu 3: Với a, b, c là số dương

1) Chứng minh: $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}\geq a+b+c$

2) Chứng minh: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{3}{2}$

Câu 4: Tìm nghiệm nguyên dương (x, y, z) biết: $x^2+y^2+z^2=xy+3y+2z-4$

Câu 5: Cho tam giác ABC có phân giác AD đường cao AH. Vẽ $DI\perp AB$ tại I.

a) Chứng minh rằng: $\dfrac{DI}{AH}=\dfrac{BC}{AB+AC}$

b) Trên AD lấy M, N sao cho $MBA=NBD$. Chứng minh: $\dfrac{MA}{MD}\cdot\dfrac{NA}{ND}=\left(\dfrac{AB}{BD}\right)^2$

c) Chứng minh: $MCA=NCD$

Câu 6:

1) Cho tam giác ABC có đường cao AH. Trên AB, AC lần lượt lấy điểm E, F sao cho HA là tia phân giác của góc EHF.
Chứng minh: AH, BF, CE đồng quy
2) Cho hình bình hành ABCD. Trên AB, AD lấy 2 điểm M, N bất kỳ. Vẽ hình bình hành AMPN. Gọi Q là giao điểm của BN, MD. Chứng minh rằng: C, P, Q thẳng hàng

HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1:

1) $\dfrac{1}{x^2+9x+20}+\dfrac{1}{x^2+11x+30}+\dfrac{1}{x^2+13x+42}=18$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{(x+4)(x+5)}+\dfrac{1}{(x+5)(x+6)}+\dfrac{1}{(x+6)(x+7)}=18$

ĐK: $\begin{cases} x \neq -4 \\ x \neq -5 \\ x \neq -6 \\ x \neq -7 \end{cases}$

Với điều kiện trên phương trình trở thành:

$\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{1}{x+6}+\dfrac{1}{x+6}-\dfrac{1}{x+7}=18$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{x+7}=18$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+7-x-4}{(x+4)(x+7)}=\dfrac{18(x+4)(x+7)}{(x+4)(x+7)}$

$\Leftrightarrow 3=18(x+4)(x+7) \Leftrightarrow 6(x^2+11x+28)=1$

$\Leftrightarrow 6x^2+66x+167=0 \Leftrightarrow x^2+11x+\dfrac{167}{6}=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\dfrac{11}{2}\right)^2-\dfrac{29}{12}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{11}{2}+\sqrt{\dfrac{29}{12}} \\ x=-\dfrac{11}{2}-\sqrt{\dfrac{29}{12}} \end{array}\right.$

2) $|2x-3|+1=x \Leftrightarrow |2x-3|=x-1$

TH1: $2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{3}{2}$

Khi đó phương trình trở thành:

$2x-3=x-1 \Leftrightarrow x=2$

TH2: $2x-3<0 \Leftrightarrow x<\dfrac{3}{2}$

Khi đó phương trình trở thành:

$2x-3=-x+1 \Leftrightarrow 3x=4 \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{3}$

Vậy $S=\left\{2;\dfrac{4}{3}\right\}$

Câu 2:

a) $A=\dfrac{a^2+4a+4}{a^3+2a^2-4a-8}$

$$\Leftrightarrow A=\frac{(a+2)^2}{a^2(a+2)-4(a+2)}$$

$$\Leftrightarrow A=\frac{(a+2)^2}{(a+2)^2(a-2)}$$

ĐK: $\begin{cases} a\ne 2 \\ a\ne -2 \end{cases}$

Với điều kiện trên phương trình trở thành: $A=\dfrac{1}{(a-2)}$

Để A có giá trị nguyên thì: $1\vdots(a-2)$

$\Leftrightarrow a-2\in Ư(1)\Leftrightarrow a-2\in\{1;-1\}\Leftrightarrow a\in\{3;1\}$

Vậy $a\in\{3;1\}$ **thì biểu thức a có giá trị nguyên.**

<u>Câu 3:</u>

1) Áp dụng bất đẳng thức Cô- si ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}\ge 2\sqrt{\dfrac{ab}{c}.\dfrac{bc}{a}}=2b \\ \dfrac{ab}{c}+\dfrac{ac}{b}\ge 2\sqrt{\dfrac{ab}{c}.\dfrac{ac}{b}}=2a \\ \dfrac{ac}{b}+\dfrac{bc}{a}\ge 2\sqrt{\dfrac{ac}{b}.\dfrac{bc}{a}}=2c \end{cases}$$

$\Rightarrow 2\left(\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}\right)\ge 2(a+b+c)\Leftrightarrow \dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}\ge a+b+c$ **(đpcm)**

b) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge\dfrac{3}{2}$

<u>Cách 1:</u> **Đặt** $\begin{cases} x=b+c \\ y=c+a\Rightarrow x+y+z=2(a+b+c) \\ z=a+b \end{cases}$

$$\Rightarrow x+y+z=2(a+x)\Rightarrow a=\frac{-x+y+z}{2}$$

Chứng minh tương tự ta được: $b=\dfrac{x-y+z}{2};c=\dfrac{x+y-z}{2}$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\frac{-x+y+z}{2x}+\frac{x-y+z}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{-x+y+z}{x}+\frac{x-y+z}{y}+\frac{x+y-z}{z}\ge 3$$

$$\Leftrightarrow -1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-1\ge 3\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\ge 6$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô- si ta có:

$$\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2 \\ \frac{y}{z}+\frac{z}{y}\ge 2 \\ \frac{z}{x}+\frac{x}{z}\ge 2 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\ge 6$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

<u>Cách 2:</u>

Ta có: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}+1\ge\frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}\ge\frac{9}{2}\Leftrightarrow 2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\ge 9$

Áp dụng bất đẳng thức $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9$; $x,y,z>0$ **, ta có:**

$\left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge 9\Leftrightarrow 2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\ge 9$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

<u>Câu 4:</u> Tìm nghiệm nguyên dương (x, y, z) biết: $x^2+y^2+z^2=xy+3y+2z-4$

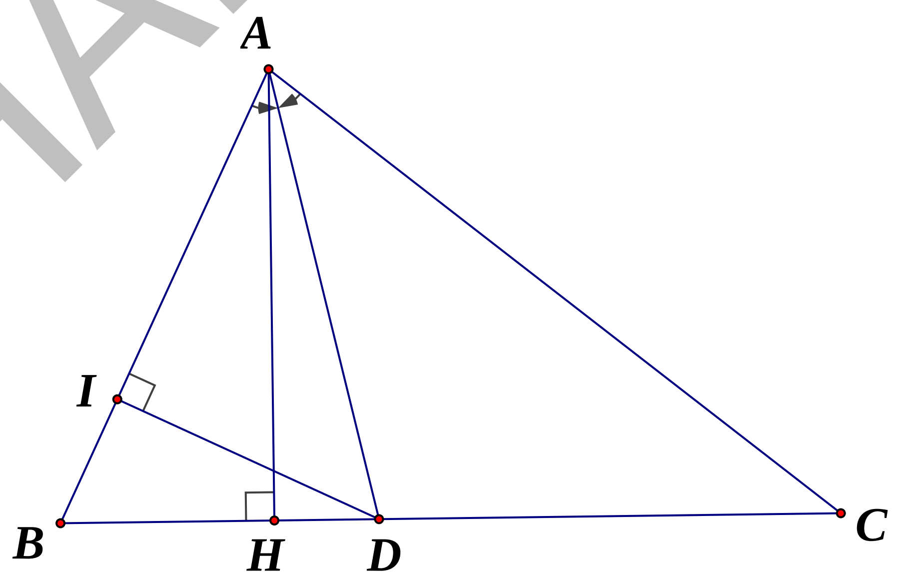
Ta có: $x^2+y^2+z^2=xy+3y+2z-4\Leftrightarrow 4x^2+4y^2+4z^2=4xy+12y+8z-16$

$\Leftrightarrow(4x^2-4xy+y^2)+(3y^2+12y+12)+(4z^2-8z+4)=0$

$\Leftrightarrow(2x-y)^2+3(y-2)^2+4(z-1)^2=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=0\\ y-2=0\\ z-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\\ z=1\end{cases}$ **. Vậy (x, y, z) = (1, 2, 1)**

<u>Câu 5:</u> Cho tam giác ABC có phân giác AD, đường cao AH. Vẽ $DI\perp AB$ **tại I.**



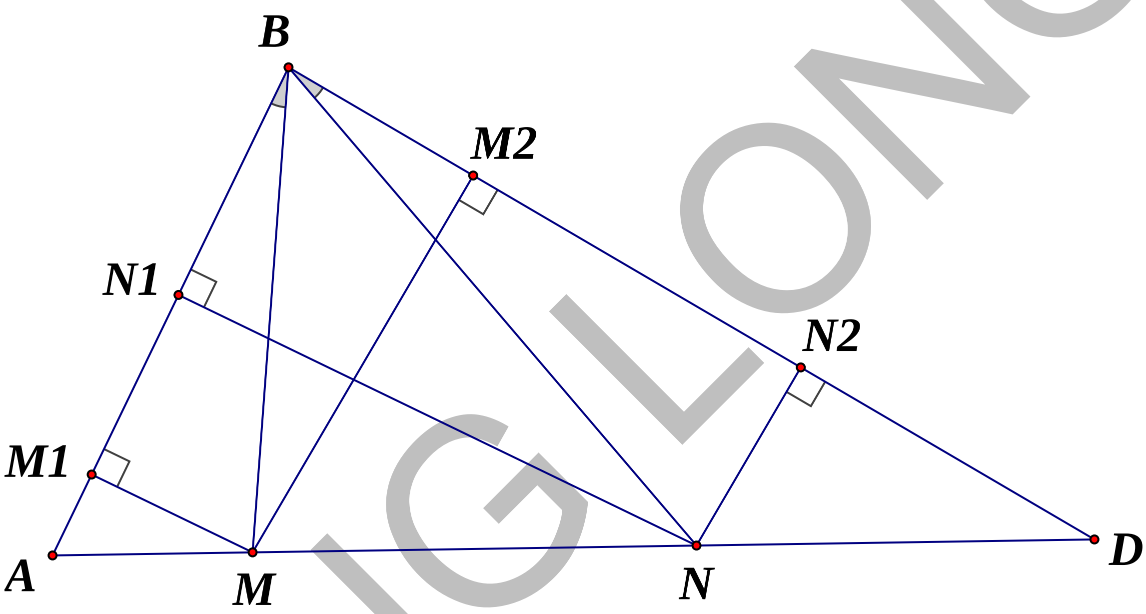
a) Chứng minh rằng: $\dfrac{DI}{AH}=\dfrac{BC}{AB+AC}$

$\Delta BID \backsim \Delta BHA \;\Rightarrow \dfrac{DI}{AH}=\dfrac{BD}{AB}(1)$

Xét ΔABC**, ta có: AD là đường phân giác.** $\Rightarrow \dfrac{BD}{AB}=\dfrac{DC}{AC}(2)$

Từ (1) và (2) ta suy ra: $\dfrac{DI}{AH}=\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{DC}{AC}=\dfrac{BD+DC}{AB+AC}=\dfrac{BC}{AB+AC}$

b) Trên AD lấy M, N sao cho $MBA=NBD$**. Chứng minh:** $\dfrac{MA}{MD}\cdot\dfrac{NA}{ND}=\left(\dfrac{AB}{BD}\right)^2$



$\Delta BMM_1 \backsim \Delta BN_2N \Rightarrow \dfrac{MM_1}{N_2N}=\dfrac{BM}{BN}(1)$

$\Delta BM_2M \backsim \Delta BN_1N \;\Rightarrow \dfrac{M_2M}{N_1N}=\dfrac{BM}{BN}(2)$

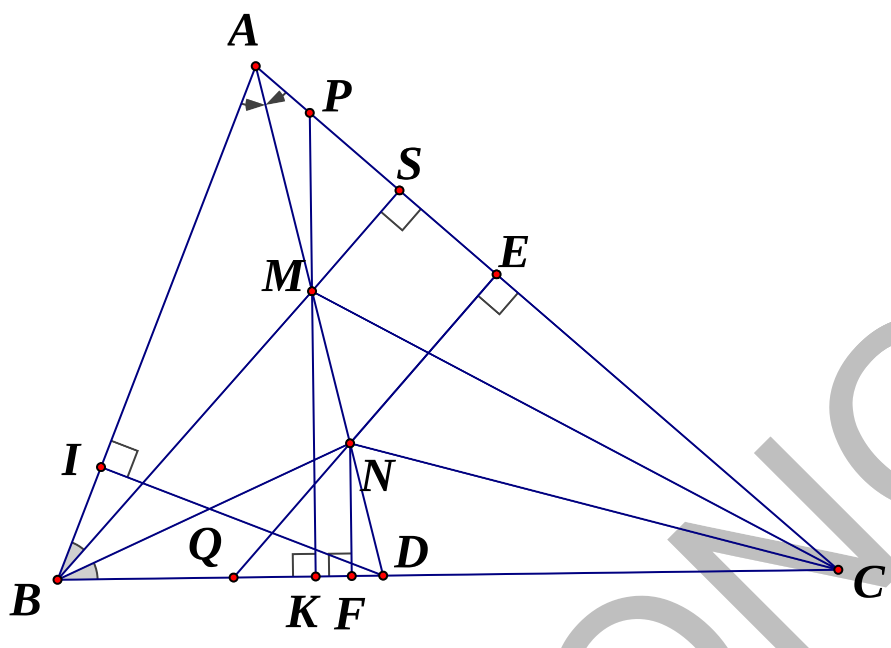
Từ (1) và (2) ta suy ra: $\dfrac{MM_1}{N_2N}=\dfrac{M_2M}{N_1N}\Rightarrow MM_1.N_1N=M_2M.N_2N$

Ta có :

$$\begin{cases}\dfrac{S_{BAM}}{S_{BND}}=\dfrac{MA}{ND}=\dfrac{MM_1.AB}{NN_2.BD}\\ \dfrac{S_{BAN}}{S_{BMD}}=\dfrac{NA}{MD}=\dfrac{NN_1.AB}{MM_1.BD}\end{cases}\Rightarrow \dfrac{MA.NA}{ND.MD}=\dfrac{MM_1.NN_1.AB^2}{MM_2.NN_2.BD^2}$$ **. Mà** $MM_1.NN_1=MM_2.NN_2$

Nên $\dfrac{MA}{MD}\cdot\dfrac{NA}{ND}=\left(\dfrac{AB}{BD}\right)^2$

c) Chứng minh: $MCA=NCD$



Vẽ $MS, NE \perp AC$ tại H và E.

Vẽ $MK, NF \perp CD$ tại K và F

MK cắt AC tại P, NE cắt CD tại Q.

ΔABC có AD là đường phân giác (gt) $\Rightarrow \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{CD}$ (tính chất đường phân giác)

Mà $\dfrac{MA}{MD} \cdot \dfrac{NA}{ND} = \left(\dfrac{AB}{BD}\right)^2$. Nên $\dfrac{MA}{MD} \cdot \dfrac{NA}{ND} = \left(\dfrac{AC}{CD}\right)^2$ (1)

Ta có : $\begin{cases} \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{S_{MAC}}{S_{MDC}} \left(\Delta MAC; \Delta MDC \text{ có chung đường cao vẽ từ C đến AD}\right) \\ \dfrac{S_{MAC}}{S_{MDC}} = \dfrac{AC.MS}{CD.MK} \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{AC.MS}{CD.MK}$ **(2)**

Cmtt, ta được : $\dfrac{NA}{ND} = \dfrac{AC.NE}{CD.NF}$ **(3)**

Từ (2) và (3) ta suy ra : $\dfrac{MA}{MD} \cdot \dfrac{NA}{ND} = \left(\dfrac{AC}{CD}\right)^2 \cdot \dfrac{MS}{MK} \cdot \dfrac{NE}{NF} (4)$

Từ (1) và (4) ta suy ra : $\dfrac{MS}{MK} \cdot \dfrac{NE}{NF} = 1 \Rightarrow MS.NE = MK.NF \Rightarrow \dfrac{MS}{NF} = \dfrac{MK}{NE}$

Mà $SMK = FNE$ (vì cùng bù với ACD)

Nên $\Delta MSK \backsim \Delta NFE (c-g-c)$

$\Delta PHM \backsim \Delta PKC (g-g) \Rightarrow \dfrac{PS}{PK} = \dfrac{PM}{PC} \Rightarrow \dfrac{PC}{PK} = \dfrac{PM}{PS}$ **. Mà $CPM = KPS$.**

Nên $\Delta PCM \backsim \Delta PKS (c-g-c)$

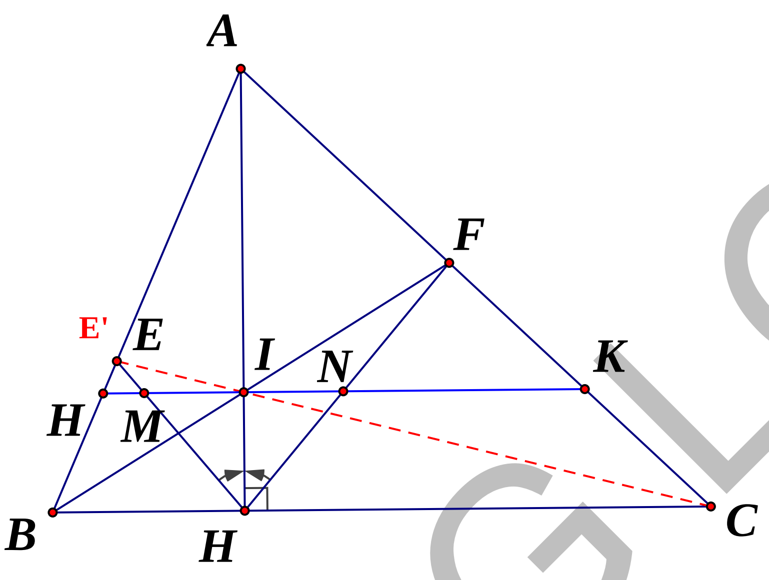
Cmtt, ta được : $\Delta QCN \backsim \Delta QEF$

Ta có :

$$\begin{cases} \widehat{MCA} = \widehat{SKM}\left(\Delta PCM \backsim \Delta PKS\right) \\ \widehat{SKM} = \widehat{FEN}\left(\Delta MSK \backsim \Delta NFE\right) \\ \widehat{FEN} = \widehat{NCD}\left(\Delta QEF \backsim \Delta QCN\right) \end{cases} \Rightarrow \widehat{MCA} = \widehat{NCD}$$

Câu 6:

1) Cho tam giác ABC có đường cao AH. Trên AB, AC lần lượt lấy điểm E, F sao cho HA là tia phân giác của góc EHF.



Chứng minh: AH, BF, CE đồng quy

Gọi I là giao điểm của AH và BF, CI cắt AB tại E'. Ta đi chứng minh E trùng E'

Qua I vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB, E'H, FH, AC lần lượt tại H, M, N, K.

Áp dụng hệ quả định lý Thales vào $\Delta E'HC, \Delta E'BC$, ta được: $\frac{MI}{HC} = \frac{HI}{BC} \Rightarrow MI = \frac{HI.HC}{BC}\left(1\right)$

Cmtt, ta được: $IN = \frac{IK.AB}{BC}\left(2\right)$

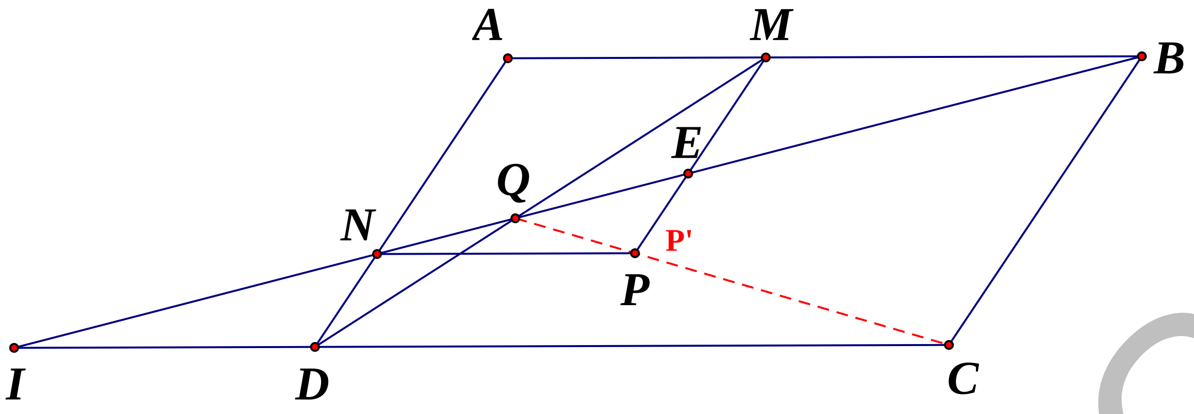
Mặt khác: $\frac{HI}{BH} = \frac{IK}{CH}\left(= \frac{AI}{AH}\right) \Rightarrow HI.HC = IK.HB\left(3\right)$

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow MI = IN \Rightarrow$ **I là trung điểm của MN.**

ΔHMN **có HI là đường trung tuyến cũng là đường cao.** $\Rightarrow \Delta HMN$ **cân tại H nên HI cũng là đường phân giác.** $\Rightarrow \widehat{E'HI} = \widehat{FHI} = \widehat{EHI}$

$\Rightarrow$ **Tia HE' trùng tia HE** $\Rightarrow E \equiv E'$ **(Vì E, E' thuộc AB)**

2) Cho hình bình hành ABCD. Trên AB, AD lấy 2 điểm M, N bất kỳ. Vẽ hình bình hành AMPN. Gọi Q là giao điểm của BN, MD. Chứng minh rằng: C, P, Q thẳng hàng



BN cắt MP tại E và cắt tia CD tại I.

Dễ thấy: $\frac{NQ}{QE}=\frac{DQ}{QM}=\frac{QI}{QB}\Rightarrow\frac{NQ}{QI}=\frac{QE}{QB}(1)$

Qua N vẽ đường thẳng song song với DC cắt QC tại P'

$\Rightarrow\frac{QN}{QI}=\frac{QP'}{QC}(2)$

Từ (1) và (2) ta suy ra $\frac{QE}{QB}=\frac{QP'}{QC}\Rightarrow$ **P'E // BC. Mà EM // BC. Nên P', E, M thẳng hàng.**

$\Rightarrow$ **MP' // AN. Lại có: NP' // AM (NP' // CD // AB)**

$\Rightarrow$ **Tứ giác ANP'M là hình bình hành.** $\Rightarrow P\equiv P'\Rightarrow$ **đpcm**

HẾT